Η πρώτη σειρά συγκλίνει στο δακτύλιο $\Delta(-2i; 5, +\infty)$

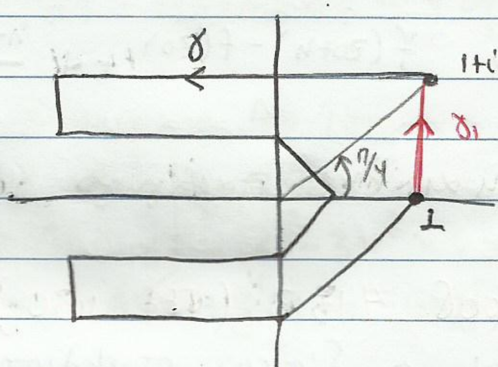
Έπειτα, $b_n := 10^{-n}$ με $r_2 = \dfrac{1}{\limsup \sqrt[n]{|b_n|}} = 10$

Συνεπώς, η δεύτερη σειρά συγκλίνει στο δίσκο $B(-2i, 10)$

Άρα, η σειρά Laurent συγκλίνει στο δακτύλιο $\Delta(-2i; 5, 10)$

Εφαρμογή

$\displaystyle\int_\gamma \frac{\operatorname{Log} z}{z}\, dt$ κατά μήκος της γ όπως στο σχήμα



Λύση

$$\int_\gamma \frac{\operatorname{Log} z}{z}\, dz = \int_\gamma \operatorname{Log} z \, d(\operatorname{Log} z) =$$

$$= \left.\frac{\log^2 z}{2}\right|_\gamma \quad (1)$$

Αν ενώσουμε το 1 με το $1+i$ παίρνουμε μία κλειστή καμπύλη $\Gamma = \gamma + \gamma_1$ και άρα $\int_\Gamma f(z)\,dz = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_\Gamma \frac{\operatorname{Log} z}{z}\, dz = 0 \Rightarrow \int_\gamma \frac{\operatorname{Log} z}{z}\, dz = -\int_{\gamma_1} \frac{\operatorname{Log} z}{z}\, dz$$

Άρα, $(1) = -\displaystyle\int_{\gamma_1} \frac{\operatorname{Log}(z)}{z}\, dz$ αλλά τα z της γ_1 παίρνουν τη μορφή

$z = 1 + iy$ άρα $\displaystyle -\int_{\gamma_1} \frac{\operatorname{Log}(z)}{z}\, dz = -\int_0^1 \frac{\operatorname{Log}(1+iy)}{1+iy}\, d(1+iy) =$

$$= \frac{\operatorname{Log}^2(1+i)}{2} - \frac{\operatorname{Log}^2(1+i\cdot 0)}{2} = \frac{-1}{2}\left(\log r_2 + i\frac{\pi}{4}\right)$$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω τόπος τ και f_n ορισμένες στο τ και ολόμορφες
Έστω τώρα (γ) στον τόπο τ και αναζητούμε:

$\int_\gamma \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)\,dz$ το οποίο είναι ίσο με: $\sum_{n=0}^{\infty} \int_\gamma f_n(z)\,dz$

όπου (γ) κατά τμημ. διαφορίσιμη και η σειρά να συγκλίνει ομοιόμορφα πάνω στη (γ)

Αποδ

Έστω $g_n := \sum_{k=0}^{n} f_k \to g$ και θδο $\int_\gamma g(z)\,dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_\gamma f_n(z)\,dz$.
Παίρνουμε λοιπόν τη διαφορά και το εκτιμούμε

$$\int_\gamma g(z)\,dz - \sum_{n=0}^{\infty} \int_\gamma f_n(z)\,dz \overset{\circledast}{=} \int_\gamma g(z)\,dz - \int_\gamma \sum_{n=0}^{k} f_n(z)\,dz =$$

$$= \int_\gamma \left(g(z) - \sum_{n=0}^{k} f_n(z) \right) dz = \int_\gamma \left(g(z) - g_k(z) \right) dz$$

$\circledast$ $\int_\gamma (\varphi_1 + \varphi_2) = \int_\gamma \varphi_1 + \int_\gamma \varphi_2$

άρα θδο $\int_\gamma (g(z) - g_k(z))\,dz \xrightarrow{k\to\infty} 0$

Ξέραμε $g_n \xrightarrow{u} g$: $(\forall \varepsilon>0)(\exists k_0)\ k \geq k_0 \Rightarrow |g_n(z) - g(z)| \leq \varepsilon,\ \forall z \in \gamma$

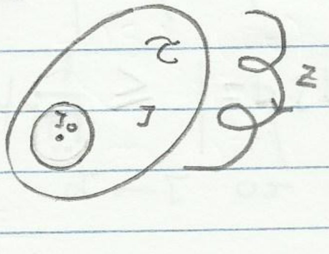
$$\left| \int_\gamma \overbrace{(g(z) - g_k(z))}^{\forall k \geq k_0}\, dz \right| \leq \varepsilon\, \mu(\gamma)$$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω τόπος τ και μια καμπύλη γ κατά τμήματα διαφορίσιμη και $\forall z \in \gamma$ και $\zeta \in \tau$, $f(z,\zeta) \in \mathbb{C}$
Εάν $f(z,\zeta)$, $(z,\zeta) \in \gamma \times \tau$ με f συνεχής μιγαδ. συνάρτηση τότε και η $\varphi(\zeta) = \int_\gamma f(z,\zeta)\,dz$, $\zeta \in \tau$ συνεχής

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$\zeta \to \zeta_0$



$$\varphi(\zeta_1) - \varphi(\zeta_0) = \int_\gamma f(z,\zeta_1)\,dz - \int_\gamma f(z,\zeta_0)\,dz$$
$$= \int_\gamma \left(f(z,\zeta_1) - f(z,\zeta_0) \right) dz \quad (1)$$

Το συνολο $\gamma \times \{J_0, J_1, J_2, \dots, J_n, \dots\}$ συμπαγές, $f(z,J)$ ομ. συν. στο K

$(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)\ |(z,J_n)-(z,J_0)|<\delta \Rightarrow |f(z,J_n)-f(z,J_0)|<\varepsilon$

αυτο ισχυει για πολυ μεγαλο n

Ετσι, ① $|\varphi(J_n)-\varphi(J_0)| \le \varepsilon\,\mu(\gamma)$

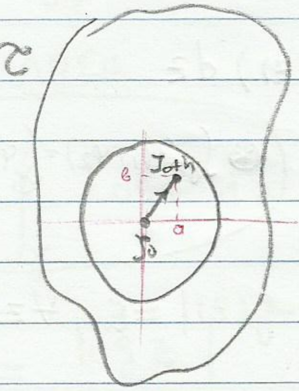
ΘΕΩΡΗΜΑ

Για το παραπανω θεωρημα αν $\exists f_J(z,J)$ και είναι συνεχης τοτε:

$$\frac{d}{dJ}\int_\gamma f(z,J)\,dz = \int_\gamma f_J(z,J)\,dz,\quad J\in\tau$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Εστω $\varphi(J)=\int_\gamma f(z,J)\,dz$



$J=J_0+h$ οπου $h=a+ib$

$$\frac{\varphi(J_0+h)-\varphi(J_0)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_\gamma f(z,J_0+h) - \int_\gamma f(z,J_0)\,dz\right]$$

$$=\frac{1}{h}\int_\gamma \big(\underbrace{f(z,J_0+h)-f(z,J_0)}\big)\,dz =$$

$$=\frac{1}{h}\int_\gamma\int_0^h \frac{\partial f}{\partial J}(z,J)\,dJ\,dz =$$

Θελω για h αρκετα μικρο: $\frac{1}{h}\int_\gamma\int_0^h \frac{\partial f}{\partial J}(z,J)\,dz$ να συγκλινει στο $\int_\gamma f_J(z,J)\,dz$.

Ετσι,

$$\left|\frac{1}{h}\int_\gamma\left(\int_0^h f_J(z,J)\,dJ\right)dz - \int_\gamma f_J(z,J)\,dz\right| =$$

$$=\left|\frac{1}{h}\int_\gamma\left(\int_0^h f_J(z,J)\,dz - h\,f_J(z,J_0)\right)dJ\Big)\,dz\right| =$$

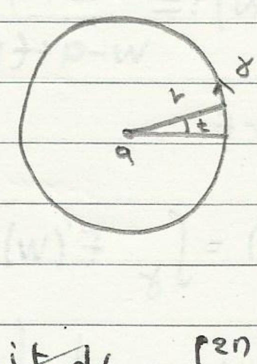
$$=\left|\frac{1}{h}\int_\gamma\left(\int_0^h \underbrace{f_J(z,J)-f_J(z,J_0)}_{\text{θελω } <\varepsilon \text{ διοτι το } J\to J_0}\,dJ\right)dz\right| \le \frac{1}{\cancel{|h|}}\mu(\gamma)\cdot 2\cancel{|h|}\cdot\varepsilon$$

$$\le \varepsilon\cdot\mu(\gamma).$$

Τοπικές Ιδιότητες

Έστω γ κύκλος με παράσταση:

$z = a + re^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$



τότε:

$$\int_\gamma (z-a)^n \, dz = \begin{cases} 0 , & n \neq -1 \\ ij , & n = -1 \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$\int_\gamma (z-a)^{-1} \, dz = \int_\gamma \frac{dz}{z-a} := \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cancel{re^{it}}} \, i\cancel{re^{it}} \, dt = \int_0^{2\pi} i \, dt =$$

$$= 2\pi i$$

Άρα τώρα μπορούμε να δούμε

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (z-a)^n \, dz = \begin{cases} 0 , & n \neq -1 \\ 1 , & n = -1 \end{cases}$$

Αν έχουμε φορά των δεικτών του ρολογιού τότε για $n=-1$ θα δίνει την τιμή -1.

Θεώρημα: Αν γ θετικά προσανατολισμένος κύκλος $K(a,r)$ τότε $\forall z \in B(a,r)$ ισχύει:

$$\int_\gamma \frac{dw}{w-z} = 2\pi i$$

Απόδ.

Έστω $z \in B(a,r)$ τότε $\forall t \in [0,1]$ το $(1-t)a + tz$ ανήκει στο δίσκο $B(a,r)$ (διότι $|(1-t)a + tz| = t|a-z| < r$

$$\int_\gamma \frac{dw}{w-(1-t)a-tz} = \int_\gamma \frac{dw}{w-a-t(z-a)} = g(t)$$

$$g(0) = \int_\gamma \frac{dw}{w-a} \quad \text{και} \quad g(1) = \int_\gamma \frac{dw}{w-z}$$

$$g'(t) = \int_\gamma \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{w-a-t(z-a)} \right) dw = \int_\gamma \frac{z-a}{[w-a+t(a-z)]^2} \, dw$$

ομως για t=σταθ

$$F(w) := \frac{z-a}{w-a+t(a-z)} \rightsquigarrow F'(w) = \frac{z-a}{[w-a+t(a-z)]^2}$$

τοτε

$$g'(t) = \int_\gamma F'(w)\,dw = 0 \Longrightarrow g(1) = g(0) = 2\pi i$$

(Αφου $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dw}{w-\alpha} = 1$)